克拉默法则，矩阵分块

林胤榜

同济大学数学科学学院

主要内容

解方程组-克拉默法则

之前，我们见过以下克拉默法则的二阶版本.
给定线性方程组

$$Ax = b.$$

其中，$A \in M_{n\times n}$, $x = (x_1, \cdots, x_n)^T$, $b = (b_1, \cdots, b_n)^T$.

定理 (克拉默法则)

假设 $|A| \neq 0$. 记 A_i 为将系数矩阵 A 的第 i 列换成 b 的矩阵，则 $Ax = b$ 有唯一解:

$$x_1 = \frac{|A_1|}{|A|}, x_2 = \frac{|A_2|}{|A|}, \cdots, x_n = \frac{|A_n|}{|A|}.$$

由于 $|A| \neq 0$, A 可逆. 方程有唯一解:

$$x = A^{-1}b.$$

另外, 由 $A^{-1} = \frac{A^*}{|A|}$, 方程的解为

$$x = \frac{A^* b}{|A|} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

其中

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

则

$$
\begin{aligned}
x_i &= \frac{A_{1i}b_1 + A_{2i}b_2 + \cdots + A_{ni}b_n}{|A|} \\
&= \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1(i-1)} & b_1 & a_{1(i+1)} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2(i-1)} & b_2 & a_{2(i+1)} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n(i-1)} & b_n & a_{n(i+1)} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}{|A|} \\
&= \frac{|A_i|}{|A|}.
\end{aligned}
$$

□

总结：目前我们有两种方法解 $Ax = b$:

i $x = A^{-1}b$;

ii 克拉默法则.

例子

解方程组 $Ax = b$. 其中,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

例子

解方程组 $Ax=b$. 其中,

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 1 & 2 & 1\\ 2 & 1 & 3\end{pmatrix},\quad b=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}.$$

方法一: (先求 A^{-1}.) $A^*=\begin{pmatrix}5 & 4 & -3\\ -1 & 1 & 0\\ -3 & -3 & 3\end{pmatrix}$,

$|A|=6+1-2-7+3-1=3.$

则 $A^{-1}=\frac{A^*}{|A|}=\begin{pmatrix}\frac{5}{3} & \frac{4}{3} & -1\\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0\\ -1 & -1 & 1\end{pmatrix}$, $x=A^{-1}b=\begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix}$.

方法二（克拉默法则）

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}}{3} = \frac{1}{3}(6+1-1-2+3-1) = 2$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}}{3} = \frac{1}{3}(3+1+2-2-3-1) = 0$$

$$x_3 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{3} = \frac{1}{3}(2-2+1-4+1-1) = -1$$

$$x = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

分块矩阵

评述

将大矩阵分成若干小块矩阵，可以给记号和计算带来便利.

分块矩阵

评述

将大矩阵分成若干小块矩阵，可以给记号和计算带来便利.

对以下矩阵进行分块:

$$A=\left(\begin{array}{cc:c} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \hdashline a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array}\right)=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}.$$

考虑它诱导的线性映射

$$L_A\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$

的效果：取 $x=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3$，依据 A 的分块对 x 分块:

(很快能看到这样分块的原因.)

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \hdashline x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x_3 \end{pmatrix},$$

记分块以后的矩阵为

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ X_2 \end{pmatrix}.$$

则

$$L_A(x) = Ax = A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix} + A\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ \hdashline a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{13}x_3 \\ \hdashline a_{23}x_3 \\ a_{33}x_3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} A_{11}X_1 \\ A_{21}X_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A_{12}X_2 \\ A_{22}X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11}X_1 + A_{12}X_2 \\ A_{21}X_1 + A_{22}X_2 \end{pmatrix}.$$

注意到, 这里子矩阵均可相乘.

总结: 分块矩阵的相乘和矩阵相乘的形式一致.

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11}X_1 + A_{12}X_2 \\ A_{21}X_1 + A_{22}X_2 \end{pmatrix}.$$

定义

上面 A_{11}, A_{12}, A_{21}, A_{22} 称为**分块矩阵的子块**.

总结: 分块矩阵的相乘和矩阵相乘的形式一致.

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11}X_1 + A_{12}X_2 \\ A_{21}X_1 + A_{22}X_2 \end{pmatrix}.$$

定义

上面 A_{11}, A_{12}, A_{21}, A_{22} 称为**分块矩阵的子块**.

注意: 对一个给定的矩阵, 可以有多种方式对矩阵进行分块.

分块矩阵的运算

1. 同型分块矩阵可以逐块相加：假设 A 和 B 是同型矩阵，采用相同的分块法，有

$$A=\begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{s1} & \cdots & A_{sr} \end{pmatrix} \quad \text{和} \quad B=\begin{pmatrix} B_{11} & \cdots & B_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ B_{s1} & \cdots & B_{sr} \end{pmatrix}$$

其中 A_{ij} 和 B_{ij} 是同型矩阵．则

$$A+B=\begin{pmatrix} A_{11}+B_{11} & \cdots & A_{1r}+B_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{s1}+B_{s1} & \cdots & A_{sr}+B_{sr} \end{pmatrix}.$$

2 对于 $\lambda \in \mathbb{R}$ 或 $\mathbb{C}$,

$$\lambda \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{m1} & A_{m2} & \cdots & A_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda A_{11} & \lambda A_{12} & \cdots & \lambda A_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda A_{m1} & \lambda A_{m2} & \cdots & \lambda A_{mn} \end{pmatrix}.$$

3 假设对矩阵 $A \in M_{m\times l}$ 和 $B \in M_{l\times n}$ 作以下分块

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1t} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{s1} & \cdots & A_{st} \end{pmatrix} \quad \text{和} \quad B = \begin{pmatrix} B_{11} & \cdots & B_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ B_{t1} & \cdots & B_{tr} \end{pmatrix},$$

使得 $A_{i1}, \ldots, A_{it}$ 的列数分别等于 $B_{1j}, \ldots, B_{tj}$ 的行数 $(1 \leqslant i \leqslant s,\ 1 \leqslant j \leqslant r)$.

3 假设对矩阵 $A \in M_{m\times l}$ 和 $B \in M_{l\times n}$ 作以下分块

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1t} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{s1} & \cdots & A_{st} \end{pmatrix} \quad \text{和} \quad B = \begin{pmatrix} B_{11} & \cdots & B_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ B_{t1} & \cdots & B_{tr} \end{pmatrix},$$

使得 $A_{i1}, \ldots, A_{it}$ 的列数分别等于 $B_{1j}, \ldots, B_{tj}$ 的行数 $(1 \leqslant i \leqslant s,\ 1 \leqslant j \leqslant r)$.则

$$AB = \begin{pmatrix} C_{11} & \cdots & C_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ C_{s1} & \cdots & C_{sr} \end{pmatrix},$$

其中 $C_{ij} = A_{i1}B_{1j} + A_{i2}B_{2j} \cdots + A_{it}B_{tj}$.

例子

求 AB:

$$A=\left(\begin{array}{c:cc}1&0&0\\2&0&0\\\hdashline 3&4&5\end{array}\right)=\begin{pmatrix}A_{11}&O_{2\times 2}\\A_{21}&A_{22}\end{pmatrix}\text{ 和}B=\left(\begin{array}{cc}1&1\\\hdashline 2&1\\1&3\end{array}\right)=\begin{pmatrix}B_1\\B_2\end{pmatrix}.$$

注意到它们可以作为分块矩阵相乘:

$$AB=\begin{pmatrix}A_{11}&O_{2\times 2}\\A_{21}&A_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}B_1\\B_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A_{11}B_1+OB_2\\A_{21}B_1+A_{22}B_2\end{pmatrix}.$$

$$A_{11}B_1=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\2&2\end{pmatrix},\ A_{21}B_1=\begin{pmatrix}3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&3\end{pmatrix},$$

$$A_{22}B_2=\begin{pmatrix}4&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1\\1&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}13&19\end{pmatrix},\text{ 所以}AB=\left(\begin{array}{cc}1&1\\2&2\\\hdashline\end{array}\right.$$

运算

4 $A = \begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{s1} & \cdots & A_{sr} \end{pmatrix}$, 则 $A^T = \begin{pmatrix} A_{11}^T & \cdots & A_{s1}^T \\ \vdots & & \vdots \\ A_{1r}^T & \cdots & A_{sr}^T \end{pmatrix}$.

运算

4 $A = \begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{s1} & \cdots & A_{sr} \end{pmatrix}$, 则 $A^T = \begin{pmatrix} A_{11}^T & \cdots & A_{s1}^T \\ \vdots & & \vdots \\ A_{1r}^T & \cdots & A_{sr}^T \end{pmatrix}$.

5 假设 $A \in M_{n\times n}$, 子块只在对角线上非零, 而且对角线上的子块均为方阵, 即

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & & & \mathbf{0} \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & \ddots & \\ & & & A_s \end{pmatrix},$$

其中 $A_1, \ldots, A_s$ 均为（可能不同大小的）方阵,
则称分块矩阵 A **为对角分块矩阵**, 且 $|A| = |A_1| \cdot |A_1| \cdots |A_s|$.

由性质 5 可知，若对任意 i 均有 $|A_i| \neq 0$，则 $|A| \neq 0$，而且

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} A_1^{-1} & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & A_s^{-1} \end{pmatrix}.$$

例子

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix},\ \text{求 } A^{-1}.$$

例子

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&3\\0&4&5\end{pmatrix}, \text{求 } A^{-1}.$$

注意到，可以对矩阵进行分块使得它成为对角分块矩阵. 令 $B=\begin{pmatrix}2&3\\4&5\end{pmatrix}$. 求 B^{-1}: 首先，$|B|=-2$，然后 B 的伴随矩阵为 $B^*=\begin{pmatrix}5&-4\\-3&2\end{pmatrix}^T=\begin{pmatrix}5&-3\\-4&2\end{pmatrix}$. 所以

$$B^{-1}=-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}5&-3\\-4&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{5}{2}&\frac{3}{2}\\2&-1\end{pmatrix}.$$

则

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-\frac{5}{2}&\frac{3}{2}\\0&2&-1\end{pmatrix}.$$

分块矩阵的应用

命题

假设 $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$. 那么 $A = 0$ 当且仅当 $A^TA = 0$.

证明.
($\Longrightarrow$) $A = 0$ 意味着 A 的各项均为零, 所以结论显然.
($\Longleftarrow$) 以列分块 A: $A = \left(a_1, \ldots, a_n\right)$, 其中 $a_j \in M_{m\times 1}$, 则

$$0 = A^TA = \begin{pmatrix} a_1^T \\ a_2^T \\ \vdots \\ a_n^T \end{pmatrix} \left(a_1, \ldots, a_n\right) = \begin{pmatrix} a_1^Ta_1 & a_1^Ta_2 & \cdots & a_1^Ta_n \\ \vdots & & & \vdots \\ a_n^Ta_1 & a_n^Ta_2 & \cdots & a_n^Ta_n \end{pmatrix}.$$

特别地, $a_j^Ta_j = 0$, $1 \leqslant j \leqslant n$.

又 $a_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix}$,

$$a_j^T a_j = \begin{pmatrix} a_{1j} & \cdots & a_{nj} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix} = a_{ij}^2 + \cdots + a_{nj}^2,$$

所以 $\forall i, j,\ a_{ij} = 0$. $\square$

又 $a_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix}$,

$$a_j^T a_j = \begin{pmatrix} a_{1j} & \cdots & a_{nj} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix} = a_{ij}^2 + \cdots + a_{nj}^2,$$

所以 $\forall i, j$, $a_{ij} = 0$. □

假设 a 是一个列向量，则 $a^T a$ 是它的长度.

又 $a_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix}$,

$$a_j^T a_j = \begin{pmatrix} a_{1j} & \cdots & a_{nj} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix} = a_{ij}^2 + \cdots + a_{nj}^2,$$

所以 $\forall i, j$, $a_{ij} = 0$. □

假设 a 是一个列向量，则 $a^T a$ 是它的长度.

推论

假设 a 是一个列向量，则 $a = 0$ 当且仅当 $a^T a = 0$.